

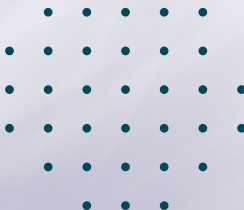
Géométrie des motifs de droites discrètes

Tristan Roussillon

13/10/2013

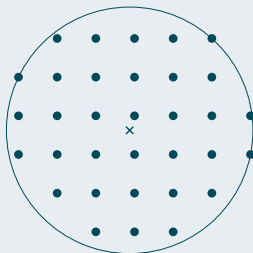
Journée du GT GEODIS

Un petit dessin...



Disque discret

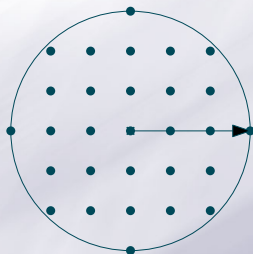
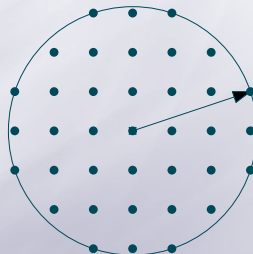
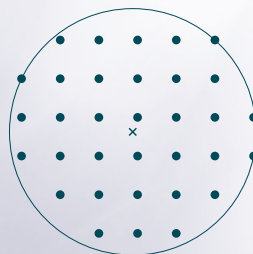
Discrétisation de Gauss d'un disque euclidien $D(C, r)$



Définition analytique équivalente

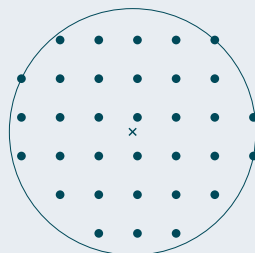
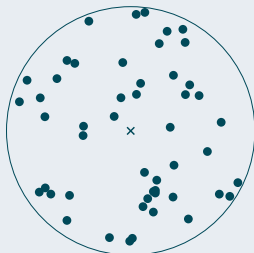
$$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid (x - C_x)^2 + (y - C_y)^2 \leq r^2\}$$

Trois modèles de disques discrets

(a) $C \in \mathbb{Z}^2, r \in \mathbb{Z}$ (b) $C \in \mathbb{Z}^2, r^2 \in \mathbb{Z}$ (c) $C \in \mathbb{Q}^2, r^2 \in \mathbb{Q}$

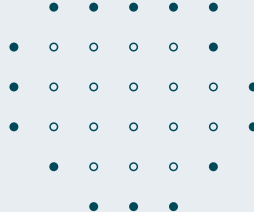
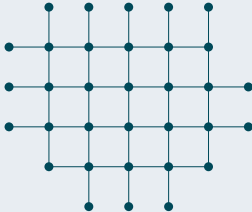
Motivation

Comprendre la distribution spatiale des points



Remarque

Seul les points du bord nous intéresse

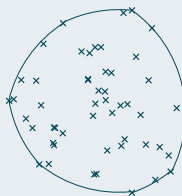


Un outils

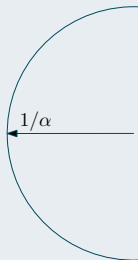
α -hull, intersection de disques généralisés



(d) négatif



(e) positif



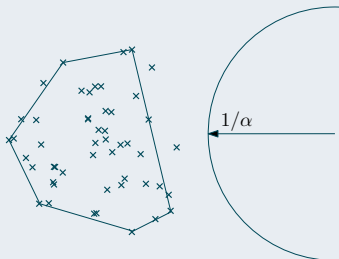
[EKS83] Edelsbrunner, H., Kirkpatrick, D., Seidel, R.
On the Shape of a Set of Points in the Plane
IEEE Transactions on Information Theory, 29(4) :551–559, 1983.

Un outils

α -shape, graphe



(f) négatif

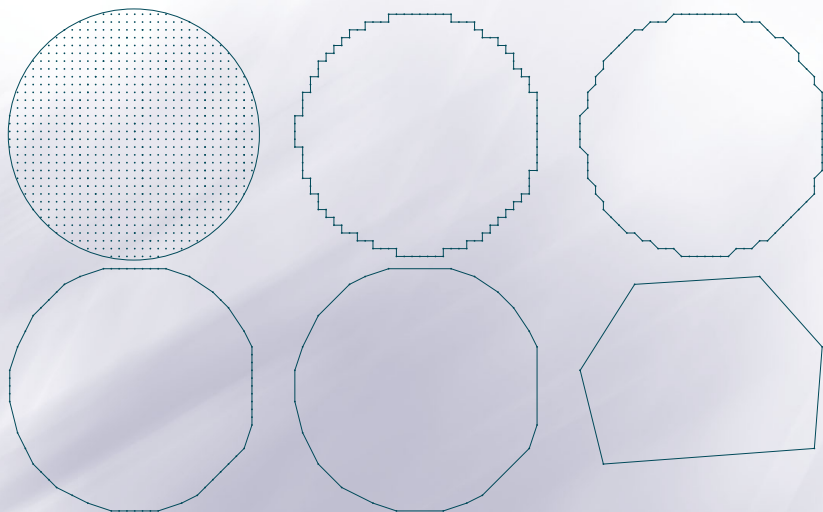


(g) positif



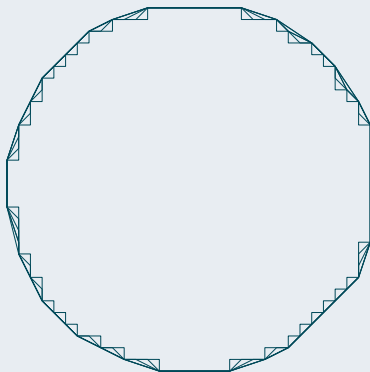
[EKS83] Edelsbrunner, H., Kirkpatrick, D., Seidel, R.
On the Shape of a Set of Points in the Plane
IEEE Transactions on Information Theory, 29(4) :551–559, 1983.

Intérêt des α -shape, $\alpha \in [-2; 1/r_{min}[$

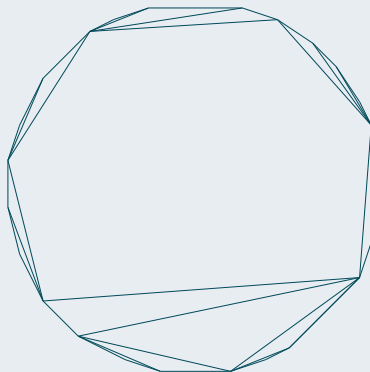


Triangulation de Delaunay d'ordre 0 et n

Union des α -shapes, Delaunay, Voronoï



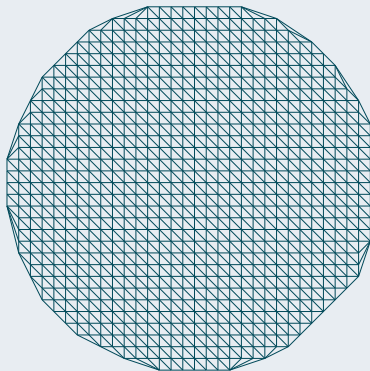
(h) négatif



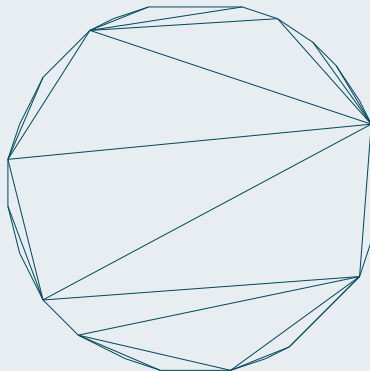
(i) positif

Triangulation de Delaunay d'ordre 0 et n

Union des α -shapes, Delaunay, Voronoï



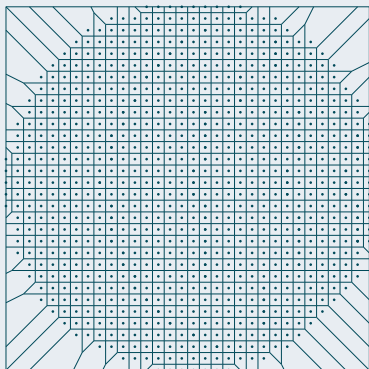
(j) négatif



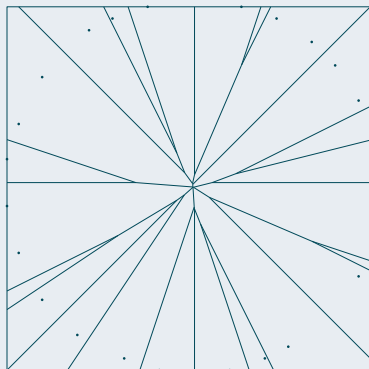
(k) positif

Triangulation de Delaunay d'ordre 0 et n

Union des α -shapes, Delaunay, Voronoï



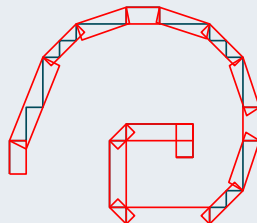
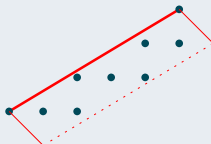
(l) négatif



(m) positif

Prenons un objet simple : le motif (1er octant)

Discrétisation plancher d'un segment de droite



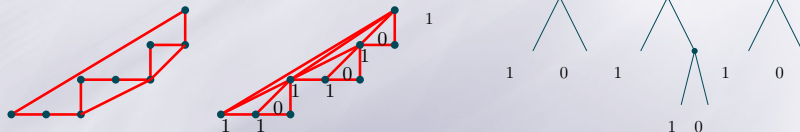
$$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq ax + by < (a + b), 0 \leq x + y \leq (a + b)\}$$

Triangulations de Delaunay d'ordre 0 et n d'un motif ?

Plan

- 1 Motivation
- 2 Triangulation de Delaunay d'ordre 0 (CDT)**
- 3 Triangulation de Delaunay d'ordre n (FDT)

Résultat



[RL11] Roussillon, T., Lachaud, J-O.,
 Delaunay properties of digital straight segments
Discrete Geometry and Computer Imagery, 308–319, 2011.

Schéma de preuve

1. L'arbre recouvrant minimal (euclidien) divise la CDT en deux parties



2. La partie supérieure de l'enveloppe convexe se triangule de manière unique



Schéma de preuve

1. L'arbre recouvrant minimal (euclidien) divise la CDT en deux parties



2. La partie supérieure de l'enveloppe convexe se triangule de manière unique



Schéma de preuve

1. L'arbre recouvrant minimal (euclidien) divise la CDT en deux parties



2. La partie supérieure de l'enveloppe convexe se triangule de manière unique



Application directe : α -shape, $\alpha \in [-2; 0]$

Calcul incrémental et *output-sensitive* de l'enveloppe convexe ($\alpha = 0$)

Complexité en $O(h \log r)$, où $h = O(r^{2/3})$ est le nombre de sommets.



[H98] Har-Peled, S.

An output sensitive algorithm for discrete convex hulls

Computational Geometry, 10(2) :125–138, 1998.

Généralisation pour $\alpha \leq 0$

- ≡ calcul récursif à partir des arêtes de l'enveloppe convexe
- ≡ calcul incrémental à partir des convergents des arêtes

Complexité en $O(h \log r)$.
Stage de master de Thomas Lafond

Plan

- 1 Motivation
- 2 Triangulation de Delaunay d'ordre 0 (CDT)
- 3 Triangulation de Delaunay d'ordre n (FDT)**

Résultat



Topologie

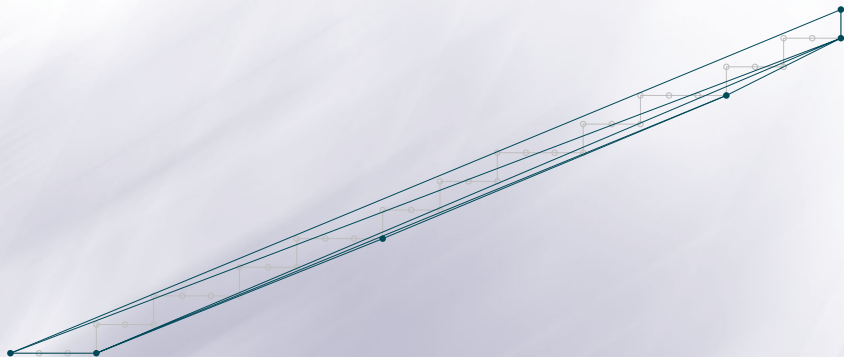
Soit $n = O(\max(a, b))$, la profondeur de développement en fractions continues de a/b , la pente du motif.

- ▬ $n + 2$ sommets
- ▬ $2n + 1$ arêtes ($n + 2$ au bord et $n - 1$ internes)
- ▬ n faces



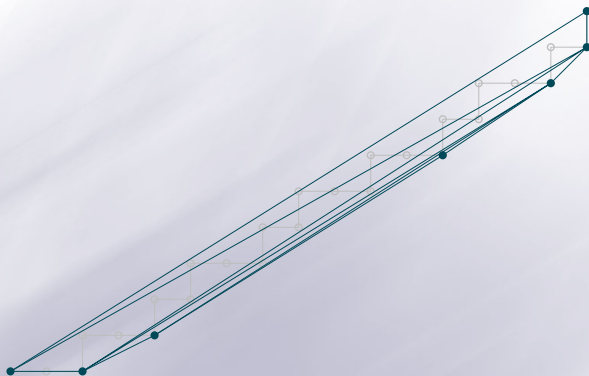
[R13] Roussillon, T.,
Euclidean Farthest-Point Voronoï Diagram of a Pattern
soumis à Discrete Applied Mathematics, 2013.

Exemples



$$12/29 = [0; 2, 2, 2, 2]$$

Exemples



$2.(5/8)$ où $5/8 = [0; 1, 1, 1, 2]$

Retour sur l'algorithme d'Euclide

Soit $\theta(z_n) = p_n/q_n = [u_0, u_1, \dots, u_n]$ ($q_n > p_n > 0$ sont des entiers premiers entre eux).

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, & r_{-1} &= q_n, & r_0 &= p_n, \\ \forall 1 \leq k \leq n, & u_k &= \left\lfloor \frac{r_{k-2}}{r_{k-1}} \right\rfloor, & r_k &= r_{k-2} - u_k r_{k-1}. \end{aligned} \quad (1)$$

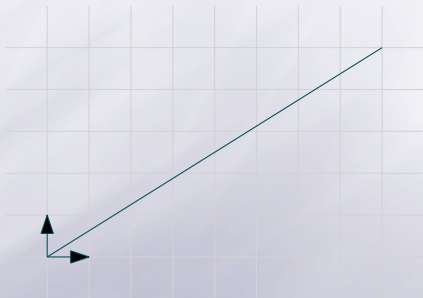
Les restes sont positifs et décroissants.

$$r_{-1} = q_n > p_n = r_0 > \dots > r_{n-1} = 1 > r_n = 0. \quad (2)$$

Les convergents z_k sont définis tels que $\forall 0 \leq k \leq n$, $p_k/q_k = [u_0, u_1, \dots, u_k]$.

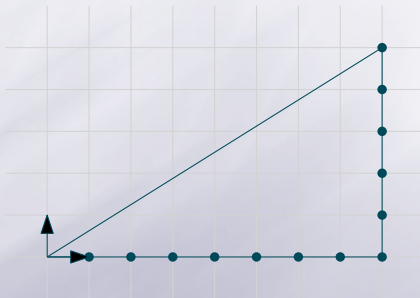
$$\begin{aligned} z_0 &= 1, & z_{-1} &= i, \\ \forall 1 \leq k \leq n, & z_k &= z_{k-2} + u_k z_{k-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Interprétation géométrique de l'algorithme d'Euclide



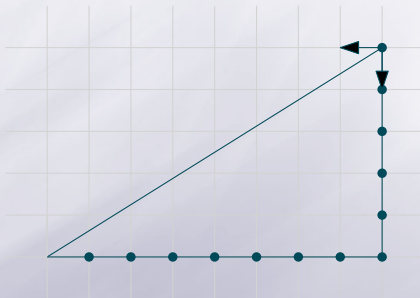
$$\forall 0 \leq k \leq n, r_k z_{k-1} + r_{k-1} z_k = z_n. \quad (4)$$

Interprétation géométrique de l'algorithme d'Euclide



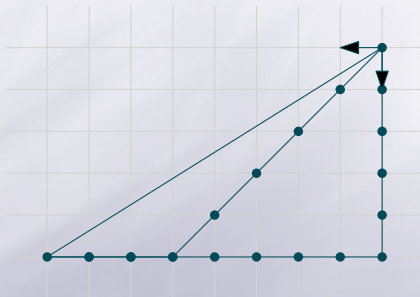
$$\forall 0 \leq k \leq n, r_k z_{k-1} + r_{k-1} z_k = z_n. \quad (4)$$

Interprétation géométrique de l'algorithme d'Euclide



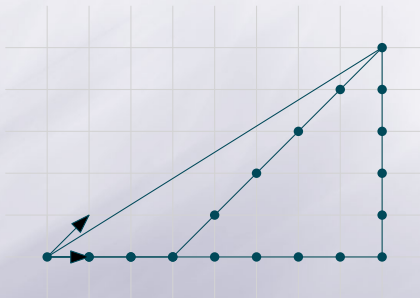
$$\forall 0 \leq k \leq n, r_k z_{k-1} + r_{k-1} z_k = z_n. \quad (4)$$

Interprétation géométrique de l'algorithme d'Euclide



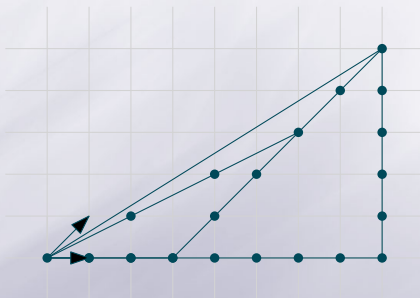
$$\forall 0 \leq k \leq n, r_k z_{k-1} + r_{k-1} z_k = z_n. \quad (4)$$

Interprétation géométrique de l'algorithme d'Euclide



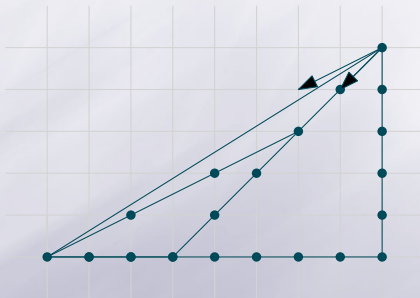
$$\forall 0 \leq k \leq n, r_k z_{k-1} + r_{k-1} z_k = z_n. \quad (4)$$

Interprétation géométrique de l'algorithme d'Euclide



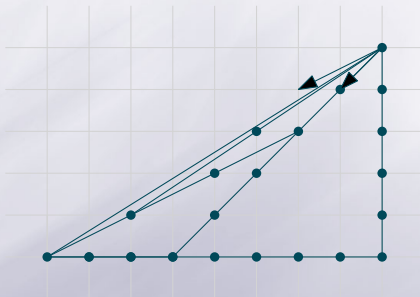
$$\forall 0 \leq k \leq n, r_k z_{k-1} + r_{k-1} z_k = z_n. \quad (4)$$

Interprétation géométrique de l'algorithme d'Euclide



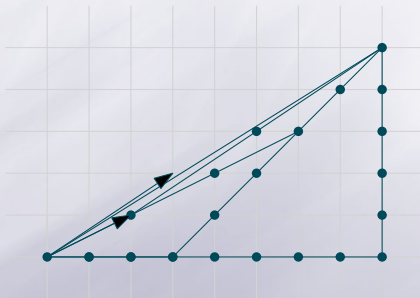
$$\forall 0 \leq k \leq n, r_k z_{k-1} + r_{k-1} z_k = z_n. \quad (4)$$

Interprétation géométrique de l'algorithme d'Euclide



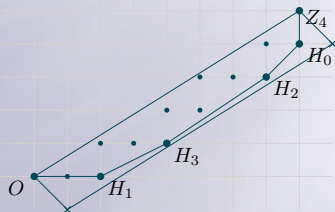
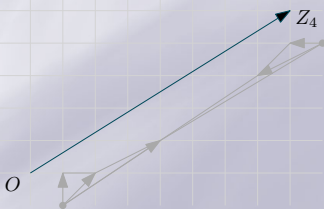
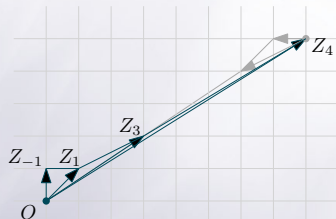
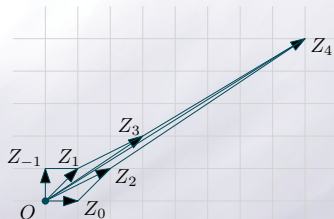
$$\forall 0 \leq k \leq n, r_k z_{k-1} + r_{k-1} z_k = z_n. \quad (4)$$

Interprétation géométrique de l'algorithme d'Euclide

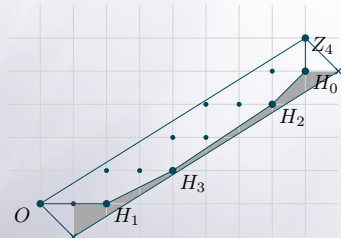
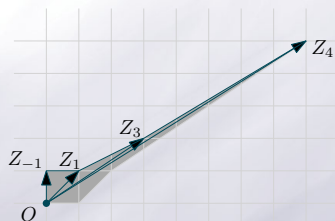


$$\forall 0 \leq k \leq n, r_k z_{k-1} + r_{k-1} z_k = z_n. \quad (4)$$

Convergenents et enveloppe convexe : observation



Convergenents et enveloppe convexe : idée de la preuve



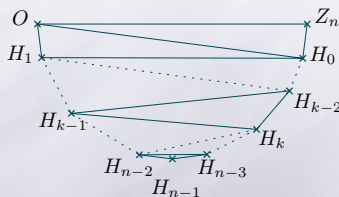
$$\forall 0 \leq k \leq n \quad q_k p_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^k. \quad (5)$$

$$\forall 1 \leq k \leq n \quad q_k p_{k-2} - p_{k-2} q_k = -u_k (-1)^k. \quad (6)$$

$$\forall -1 \leq k \leq n \quad q_n p_k - p_k q_n = r_k (-1)^k. \quad (7)$$

Définition de la triangulation

$(H_0, O, Z_n), (H_1, H_0, O), \dots, (H_k, H_{k-1}, H_{k-2}), \dots, (H_{n-1}, H_{n-2}, H_{n-3})$.



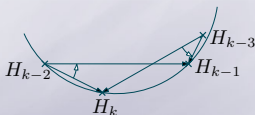
Idée de la preuve

- III I. c'est une triangulation
- III II. le cercle circonscrit de chaque triangle contient tous les points
 1. deux triangles consécutifs partagent une arête ; le cercle circonscrit du second contient le sommet opposé du premier
 2. conclure par récurrence

Exemple ($k < n$, k impair)

Trois équivalences

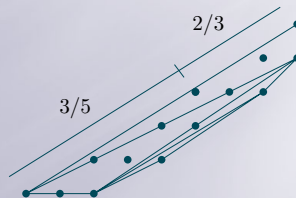
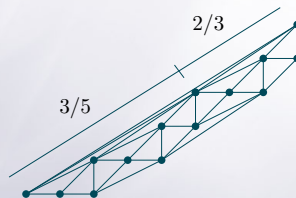
1. Le cercle passant par H_k, H_{k-1}, H_{k-2} contient H_{k-3} .
2. $(\overrightarrow{H_{k-2}H_k}, \overrightarrow{H_{k-2}H_{k-1}}) < (\overrightarrow{H_{k-3}H_k}, \overrightarrow{H_{k-3}H_{k-1}})$
3. $x = (z_n - z_{k-1} - z_{k-2})\overline{z_{k-1}}, y = \overline{(z_n - z_k - z_{k-3})z_{k-2}}$ et $\theta(x) < \theta(y)$.



3 est vrai car :

- ≡ (parties réelles) $\Re(x) > \Re(y) > 0$, par (3).
- ≡ (parties imaginaires) Par (3), (4), (5), (6) :
 - $\Im(x) = (r_{k-1} - 1)$.
 - $\Im(y) = (r_{k-1} - 1)u_k + (r_k - 1)$.
 - D'où $\Im(y) \geq \Im(x) > 0$, par (2).

Intérêt d'une description implicite



Merci