

Rotations discrètes dans l'espace Mojette

Henri Der Sarkissian^{1,2} Benoît Recur¹ Nicolas Normand¹
Jeanpierre Guédon¹

¹Université de Nantes, IRCCyN UMR 6597, Équipe IVC

²Keosys, Saint-Herblain

2013-06-13

Plan de l'exposé

- ▶ Introduction
 - ▶ Tomographie, transformée de Radon, transformée Mojette
- ▶ Rotations par transformée Mojette
 - ▶ Description
 - ▶ Algorithme
 - ▶ Exemples
- ▶ Conclusion

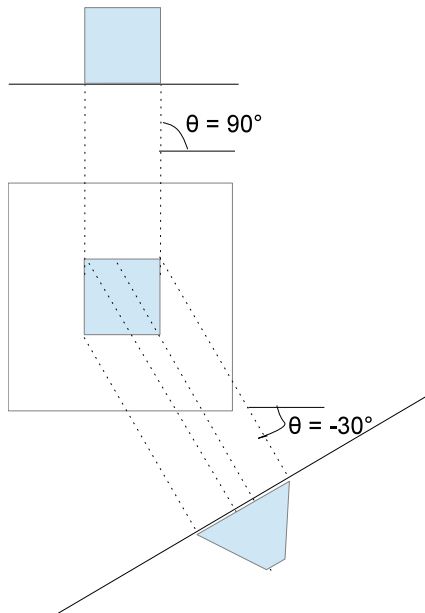
Introduction

Transformée de Radon

La transformée de Radon (1917) permet de représenter une fonction f par ses projections (intégrales).

$$[Rf](t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(t - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy$$

Transformée de Radon



Sinogramme et tomographie

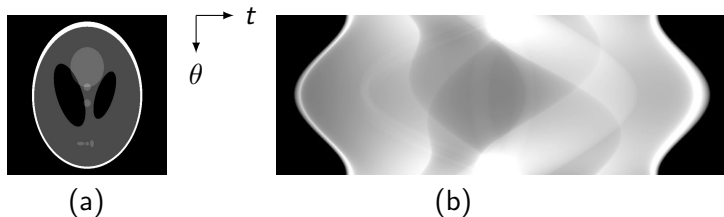


FIGURE : (a) Fantôme de Shepp-Logan. (b) Sinogramme

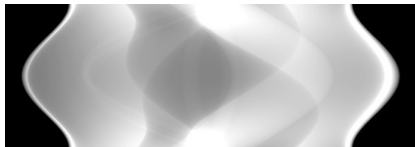
Sinogramme ensemble des projections d'un objet par la transformée de Radon. Chaque ligne représente une projection

Reconstruction tomographique problème inverse consistant à retrouver l'image d'origine à partir du sinogramme

Rotation dans le sinogramme

Dans l'espace du sinogramme de Radon

- ▶ L'espace est cyclique dans la direction des angles de projections modulo π
- ▶ Une rotation d'angle θ correspond à un décalage de l'origine dans cet espace (translation cyclique)



Reconstruction tomographique

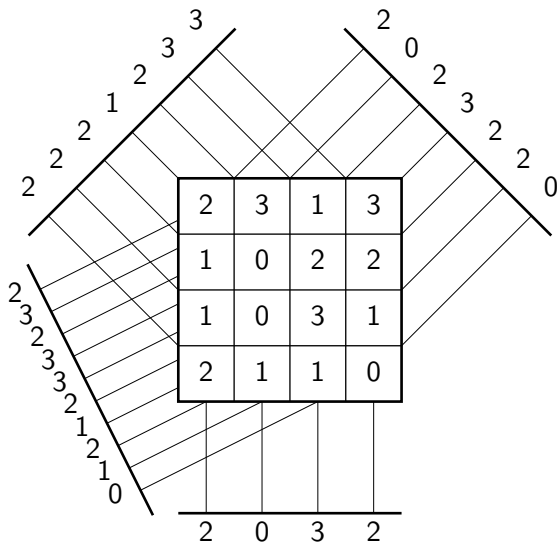
- ▶ Problème mal posé au sens de Hadamard
- ▶ Besoins en traitements numériques : discrétisation de la transformée de Radon.
- ▶ Plusieurs modèles possibles : continu-discret, discretisation naïve, Finite Radon Transform, transformée Mojette...

Transformée Mojette (GUEDON, BARBA et BURGER, 1995)

- ▶ Image discrète $f(k, l)$
- ▶ Directions discrètes (p, q) avec p et q premiers entre eux.
- ▶ Les valeurs sur les projections (*bins*) correspondent à la somme des pixels traversés.

$$[\text{MT}f](b, p, q) = \sum_{k=0}^{P-1} \sum_{l=0}^{Q-1} f(k, l) \Delta(b + kq - lp)$$

Exemple de transformée Mojette (mod 4)



Reconstruction Mojette

1. Trouver un bin provenant d'un unique pixel (correspondance $1 \leftrightarrow 1$ entre bin et pixel)
2. Ôter ce pixel de toutes les projections
3. Boucler

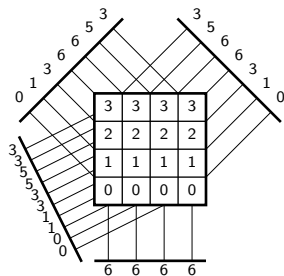
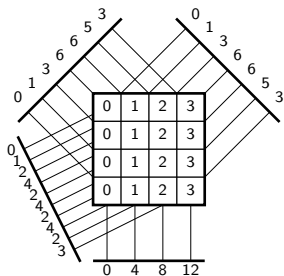
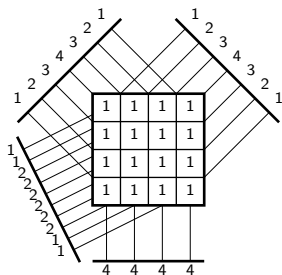
Cet algorithme reconstruit entièrement une image à chaque fois que les projections déterminent un objet unique (NORMAND et GUÉDON, 1998).

Reconstruction Mojette

Faible complexité assurée grâce à :

- ▶ Détection des correspondances $1 \leftrightarrow 1$ entre les bins et les pixels en utilisant un jeu de projections auxiliaire (image remplie de “1”)
- ▶ Localisation des pixels contribuant à un bin par un autre jeu de projections auxiliaires (image “index”)

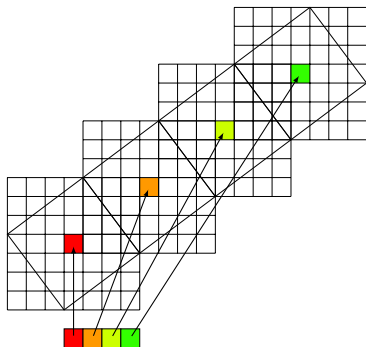
Projections auxiliaires



Rotations dans l'espace Mojette

Rotation dans l'espace Mojette

En s'inspirant des travaux sur FRT (SVALBE, 2011), on se propose de définir une rotation dans l'espace Mojette. Chaque projection est transformée en une projection d'un autre angle. La réversibilité est assurée grâce au changement d'échelle.



Les pixels subissant une rotation d'angle (p, q) ne sont plus connexes au sens usuel mais sont alignés sur une droite discrète.

Rotation Mojette : algorithme

Algorithme pour la rotation-zoomée Mojette.

Pour chaque projection P de direction (p, q) .

1. Génération de la projection P' de direction (p', q')
2. Convolution 1-D pour combler les “trous”

Puis reconstruction de l'image à partir des nouvelles projections.

Calcul des nouvelles directions de projection

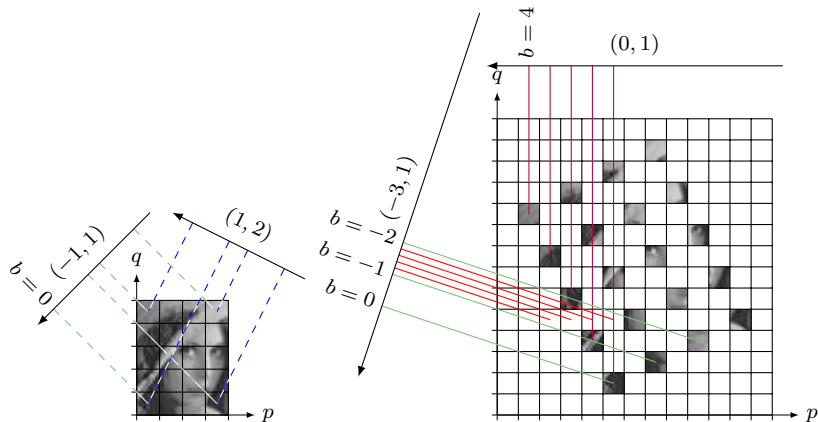
- ▶ Matrice de rotation associée : $R_{(p_\theta, q_\theta)} = \begin{pmatrix} p_\theta & -q_\theta \\ q_\theta & p_\theta \end{pmatrix}$
- ▶ Nouvelle direction de projection (p', q') :

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_\theta & -q_\theta \\ q_\theta & p_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pp_\theta - qq_\theta \\ pq_\theta + qp_\theta \end{pmatrix}$$

- ▶ Pour revenir à des entiers premiers entre eux, on divise éventuellement par leur pgdc :

$$\begin{pmatrix} p'' \\ q'' \end{pmatrix} = \frac{1}{\text{pgdc}(p', q')} \begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix}$$

Calcul des nouvelles projections



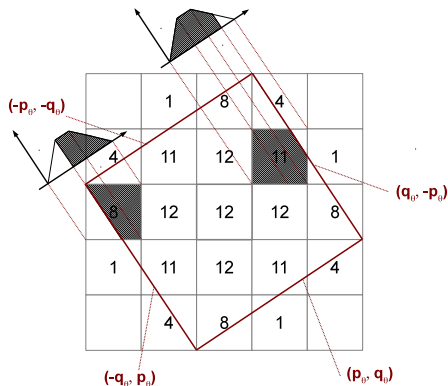
Calcul des nouvelles projections

- ▶ La valeur des bins ne change pas lors de la rotation car les mêmes pixels sont échantillonnés (et éventuellement des pixels vides dans la nouvelle image si le pgcd de p et q est différent de 1.
- ▶ On obtient donc la nouvelle projection en sur-échantillonnant la projection initiale par le facteur de sur-échantillonnage

$$S = \frac{p_{\theta}^2 + q_{\theta}^2}{\text{pgdc}(p', q')}$$

Remplissage des nouvelles projections

- ▶ Sur-échantillonnage → beaucoup de pixels nuls
- ▶ Interpolation de leur valeur par rapport à l'aire commune entre un "méta" pixel issu de la rotation et la grille initiale



Calcul du masque de convolution

Problème : calculer l'aire commune entre les pixels initiaux (en noir) et un "méta-pixel" (en rouge).

- ▶ Taille du méta-pixel : $|p_\theta| + |q_\theta|$
- ▶ Pour chaque pixel (k, l) du masque, on calcule la distance entre son centre et le bord (rouge) le plus proche :

$$d_{p_\theta, q_\theta}(k, l) = \left\| \begin{pmatrix} -q_\theta & p_\theta \\ p_\theta & q_\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \right\|_\infty \quad (1)$$

$$x_{p_\theta, q_\theta}(k, l) = \frac{p_\theta^2 + q_\theta^2}{2} - d_{p_\theta, q_\theta}(k, l) \quad (2)$$

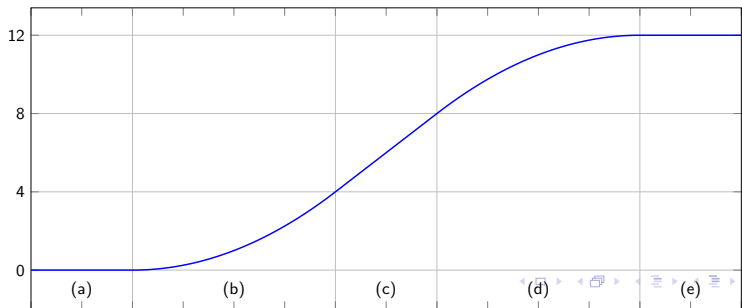
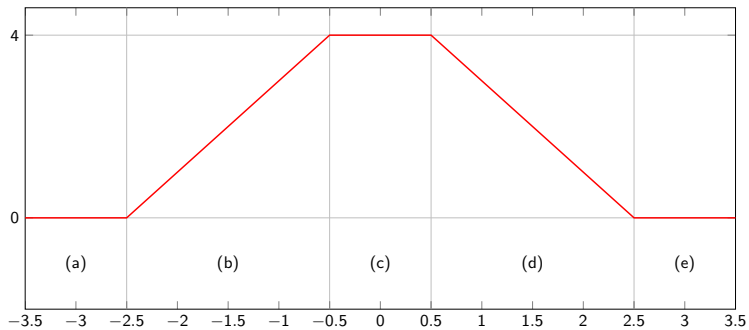
Calcul du masque de convolution

- ▶ La distance entre le centre d'un pixel et le bord le plus proche permet d'obtenir la coordonnée sur projection correspondante.
- ▶ Aire d'un pixel \Leftrightarrow aire de sa projection (pixel uniforme et unitaire).
- ▶ Aire commune à déterminer pour chaque pixel :

$$\int_0^x Trap_{p_\theta, q_\theta}(t) dt$$

- ▶ Plus facile à calculer car on sait bien paramétrer le trapèze.

Intégration trapèze



Intégration trapèze

Formule close pour trouver l'aire directement à partir de $x_{p_\theta, q_\theta}(k, l)$:

$$K_{p_\theta, q_\theta}(x) = \begin{cases} 2|p_\theta q_\theta| - K(p_\theta, q_\theta, -x) & \text{si } x < 0 \\ |p_\theta q_\theta| + 2x \min\{|p_\theta|, |q_\theta|\} & \text{si } 0 \leq x < \frac{|p_\theta| - |q_\theta|}{2} \\ |p_\theta q_\theta| - x^2 + (|p_\theta| + |q_\theta|)x & \text{si } \frac{|p_\theta| - |q_\theta|}{2} \leq x < \frac{|p_\theta| + |q_\theta|}{2} \\ - \left(\frac{|p_\theta| - |q_\theta|}{2} \right)^2 & \\ 2|p_\theta q_\theta| & \text{sinon} \end{cases}$$

Formulation discrète

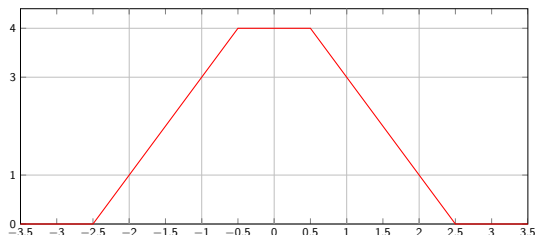
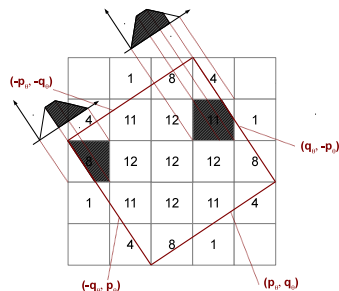
- ▶ Le trapèze discret peut-être calculé par convolution discrètes de fonctions portes de largeur respective p et q (si p ou q sont pairs) :

$$Trap_{p\theta, q\theta} = (1 \ 1) * (1 \cdots 1) * (1 \cdots 1)$$

- ▶ Les valeurs discrètes obtenues sont exactement celles nécessaires pour l'intégration → calculs simples sur des entiers

Formulation discrète : exemple

Pour la rotation d'angle $(3, 2)$:



$$(1 \ 1) * (1 \ 1 \ 1) * (1 \ 1) = (1 \ 3 \ 4 \ 3 \ 1) \implies (1 \ 4 \ 8 \ 11 \ 12)$$

Quelques exemples

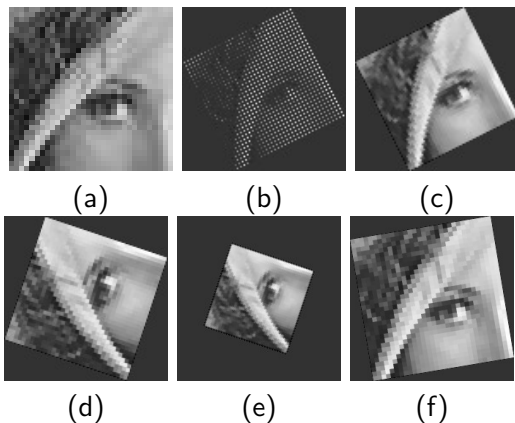


FIGURE : (a) Image initiale 32×32 . (b,c,d,f) Rotations Mojette $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(6, 1)$.

Conclusion

Conclusion

- ▶ Méthode de rotation dans l'espace Mojette
 - ▶ Basé sur la géométrie discrète
 - ▶ Dans l'espace des projections Mojette
- ▶ Rotation réversible
- ▶ Adapté aux problèmes de tomographie et de rotation couplés
- ▶ Point négatif : facteur de zoom à gérer
- ▶ Suite des travaux : extension en 3D, validation

Remerciements

- ▶ Merci aux organisateurs du GT
- ▶ Sponsors :
 - ▶ Projets QuantiCardi & NucSan des Pays de la Loire
 - ▶ IRCCyN/IVC, Polytech Nantes, Université de Nantes
 - ▶ Keosys, Saint-Herblain